Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 5

Penerapan Polinomial dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi Sehari-hari

MATEMATIKA PEMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 5

Penerapan Polinomial dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi Sehari-hari

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA

Matematika Peminatan Paket C Tingkatan V Modul Tema 5
Modul Tema 5 : Penerapan Polinomial dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi Sehari-hari

- Penulis: Sri Haryati, S.Pd., M.Si.

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

iv+ 36 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta,   Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

PENERAPAN POLINOMIAL DALAM PENGEMBANGAN ILMU DAN TEKNOLOGI SEHARI-HARI

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang konsep suku banyak (polynomial), operasi aljabar dan/atau operasi matematika dengan melibatkan suku banyak serta penerapan, penggunaan dan penyelesaian masalah yang melibatkan suku banyak dalam aktifitas sehari-hari di rumah, lingkungan tempat tinggal, dan di masyarakat. Sebelum mempelajari modul ini, Anda sudah harus menguasai *materi prasyarat* yaitu tentang konsep bentuk aljabar atau ekspresi matematika lainnya, fungsi aljabar, serta operasi aljabar fungsi yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian maupun operasi campurannya. Selain itu juga perlu mendalami tentang sistem persamaan linear, fungsi dan persamaan kuadrat.

Untuk memastikan tingkat penguasaan, Anda dapat mengerjakan latihan operasi hitung yang melibatkan fungsi aljabar yang dikenalkan di awal modul. Cara belajar dengan menggunakan modul dapat dilakukan secara mandiri (tanpa bantuan tutor/pendidik), melalui tutorial, atau menggunakan pembelajaran tatap muka seperti yang dilaksanakan dalam sekolah formal. Tata cara penggunaan modul adalah sebagai berikut.

a. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan tutor
b. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
c. Mengidentifikasi materi-materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan tutor, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama tutor
d. Melaksanakan tugas-tugas dalam modul dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
e. Mengerjakan soal dan latihan dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran pem belajaran
f. Mengerjakan soal penilaian akhir modul untuk lebih memahami materi pembelajaran dengan benar
g. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan tugas karena keterbatasan sarana, prasa-

rana, alat, media dan bahan belajar yang diperlukan, maka Anda dapat berkonsultasi dengan rekan sejawat untuk merancang tugas alternatif yang setara

h. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan soal, latihan dan penilaian akhir modul, maka Anda dapat menggunakan rubrik penilaian, kunci jawaban dan pembahasan yang diberikan diakhir modul agar lebih memahami. Kerjakan ulang soal, latihan dan penilaian akhir sampai Anda yakin tidak mengalami kesulitan mengerjakan soal

i. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami lebih lanjut uraian materi, melaksanakan tugas pembelajaran, latihan dan soal yang diberikan belum cukup membuat Anda menguasai kompetensi yang diharapkan, maka Anda perlu mempelajari lebih lanjut referensi dan daftar pustaka suatu materi pembelajaran

Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

1. Memahami konsep polinom, operasi matematika dengan polinom dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
2. Terampil melakukan operasi aljabar dan/atau operasi matematika yang melibatkan polinom dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sehari-hari

Pengantar Modul

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang memerlukan kemampuan menghitung dan menggunakan polynomial. Penerapan bentuk polinomial sederhana banyak digunakan untuk menghitung jarak atau kecepatan benda yang jatuh dari ketinggian tertentu, menghitung banyak barang, fungsi biaya untuk menafsirkan dan memprediksi kecenderungan harga pasar berbagai barang dan suku bunga bank dalam bidang ekonomi, pengelolaan harga dan biaya kirim berbagai barang yang dipesan pembeli, menyajikan pola cuaca pada daerah tertentu, mendesain bentuk struktur bangunan, lengkungan jalan atau bentuk lintasan gerak roller coaster.

Banyak kalimat, pernyataan, peristiwa atau situasi sehari-hari, yang kalau dituliskan dalam bentuk kalimat verbal dapat ditulis secara ringkas ke dalam bentuk simbolis yang berupa bentuk matematika atau ekspresi matematika, misalnya

No	Pernyataan	Bentuk Matematika
1	4 kurangnya dari sebuah bilangan	d - 4
2	8 lebihnya dari sebuah bilangan	8 + m
3	Jumlah tujuh kali sebuah bilangan dengan 11	7x + 11
4	Tiga kali sebuah bilangan berkurang 9	3x – 9
5	Selisih antara 21 dengan tiga kali sebuah bilangan	21 + 3x
6	Kuadrat sebuah bilangan bertambah 5 sama dengan 1	$X^2 + 5 = 1$
7	15 dikurang dengan setengah nilai sebuah bilangan	15 – (x/2)
8	Temperatur pada skala Celcius C sama dengan skala Kelvin K dikurang 273	C = K – 273
9	Jumlah 3 bilangan genap berturutan adalah 100	x + x + 2 + x + 4 = 100
10	68 dikurangi tiga kali sebuah bilangan sama dengan dua kali bilangan tersebut ditambah 12	68 – 3x = 2x + 12
11	Selisih usia sepasang suami istri adalah 4	X - y = 4
12	Hasil bagi dua bilangan adalah 3	X/y = 3

Dalam matematika, kita mengenal ekspresi atau bentuk matematika yang merupakan gabungan atau kombinasi symbol-simbol matematika bilangan, konstata, variabel, operasi, fungsi, tanda baca, pengelompokan dan aspek lainnya yang membentuk kalimat matematika. Pada suatu ekspresi matematika, variabel merupakan lambang pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya, konstata merupakan bilangan yang tidak memuat variabel, koefisien adalah bilangan yang memuat variabel, dan suku adalah variabel beserta koefisien atau konstata yang dipisahkan oleh operasi jumlah atau pengurangan. Perhatikan ekspresi matematika berikut

$$4x^3 + 7ax - 6y^2 + 9$$

Ekspresi matematika tersebut memiliki:

4 suku, yaitu $4x^3$, $7ax$, $6y^2$, dan 9;
3 variabel, yaitu x, a, dan y;
1 konstata, yaitu 9; dan
3 koefisien, yaitu 4, 7, dan 6

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak besaran atau variabel yang mempengaruhi besaran lainnya sehingga suatu variabel dapat memiliki hubungan fungsional dengan variabel lainnya. Misalnya, setiap orang tentu memiliki ukuran sepatu masing-masing yang bersifat unik (tunggal) dan beberapa orang bisa memiliki ukuran sepatu yang sama. Tetapi, tidak ada orang yang memiliki ukuran sepatu lebih dari satu. Hubungan orang dengan ukuran sepatu merupakan fungsi. Banyak kejadian lain yang berupa fungsi misalnya: ukuran tubuh dengan ukuran kemeja, sebuah senapan dengan daerah sasarannya.

Bentuk polinomial merupakan ekspresi matematika yang memuat satu variabel dengan variabel berpangkat bilangan bulat positif. Misal,

$$\mathbf{4x^3 + 7x - 6x^2 + 9}$$

Dari ekspresi matematika tersebut, diperoleh variabelnya adalah x dan pangkat dari variabel tersebut adalah bilangan bulat positif 3, 1, 2 dan 0. Perhatikan bahwa konstata 9 dapat ditulis sebagai $9x^0$. Pada modul ini, kita akan membahas konsep dan penerapan dari fungsi polinomial dan persamaan polinom dalam kehidupan sehari-hari.

UNIT 1 FUNGSI DAN PERSAMAAN POLINOMIAL

Sebuah *fungsi polinomial* p adalah aturan yang memadankan tiap objek atau variabel x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) sebagai variabel tak bebas dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*) di mana p(x) merupakan bentuk polinomial.

Contoh: $\mathbf{y = f(x) = 4x^3 + 7x - 6x^2}$

Sehingga f(x), dibaca “f dari x atau f pada x”, menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Pada contoh tersebut,

Nilai y untuk x = 2, adalah y = f(2) $= 4(2)^3 + 7(2) - 6(2)^2$
$= 4(8) + 14 – 6(4) = 32 + 14 - 24 = 22$
Nilai y untuk x = 2, adalah y = f(-2) $= 4(-2)^3 + 7(-2) - 6(-2)^2$
$= 4(-8) + (-14) – 6(4) = -70$
Nilai y untuk x = a, adalah y = f(a) $= 4a^3 + 7a - 6a^2$
$= a(4a^2 + 7 – 6a)$

Secara umum, bentuk fungsi polinomial derajat n dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{y = f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}$$

di mana $a_{0,}$ $a_{1,}$ ..., $a_{n,}$ koefisien; a_n 0; dan n bilangan bulat positif

Untuk n=2, diperoleh fungsi polinom derajat 2 berbentuk $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, yang merupakan fungsi polinom. Grafik fungsi polinom berbentuk parabol. Untuk n=1, diperoleh fungsi polinom derajat 1 berbentuk $y = a_0 + a_1x$, yang merupakan fungsi linear satu variabel. Grafik fungsi linear berbentuk garis lurus. Sedangkan untuk n=0 diperoleh fungsi polinom derajat 0 berbentuk $y = a_0$, yang merupakan fungsi konstan dengan grafik berupa garis lurus mendatar.

Penugasan 1

1. Buatlah 5 kelompok dalam kelas.
   a. Kelompok pertama membuat pengertian suku dari suatu polinom
   b. Kelompok kedua membuat pengertian konstata dari suatu polinom
   c. Kelompok ketiga membuat pengertian variabel dari suatu polinom
   d. Kelompok keempat membuat pengertian koefisien dari suatu polinom
   e. Kelompok kelima membuat pengertian pangkat dari suatu polinom
3. Tiap kelompok menyajikan setiap tugasnya dan kelompok lainnya memberi tanggapan
4. Tutor/guru memberikan penguatan setiap penyajian hasil kelompok

Penugasan 2

1. Tiap kelompok menuliskan 3 contoh berbeda bentuk polinom dan contoh yang bukan polinom, serta menjelaskan mana suku, variabel, koefisien, konstata dan pangkat dari setiap contoh yang dibuat
2. Tiap kelompok menyajikan setiap tugasnya dan kelompok lainnya memberi tanggapan
3. Tutor/guru memberikan penguatan setiap penyajian hasil kelompok

Contoh 1:
Apabila $H(t) = 4t^3 – t + 1$, maka: tentukan derajat H(t) dan nilai H(-2)
Penyelesaian:
Jelas H(t) adalah polinom derajat 3 dan $H(-2) = 4(-2)^3 – (-2) + 1 = -29$
Nilai x yang membuat y = p(x) = 0 membentuk persamaan polynomial. Pada contoh tersebut persamaan polinomialnya adalah

$$4x^3 + 7x - 6x^2 = 0$$
$$x(4x^2 + 7 - 6x) = 0$$

Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah x = 0 atau $4x^2 + 7 -6x = 0$. Persamaan polinom $4x^2 + 7 -6x = 0$ tidak memiliki akar real. Jadi, akar persamaan polinom tersebut adalah x = 0.

Contoh 2:
Tentukan derajat, koefisien dan konstata (suku tetap) dari suku banyak $p(x) = 2x^4 + x^2 -4x +6$. Berapakah nilai p(x) untuk x = -1

Penyelesaian:
Suku banyak tersebut memiliki derajat 4, koefisien adalah 2, 1, dan -4, serta konstatanya 6. Nilai $p(-1) =2(-1)^4 + (-1)^2 -4(-1) +6 = 2 + 1 + 4 + 6 =13$

Contoh 3:
Seorang perajin kayu membuat meja gambar berbentuk persegi panjang. Panjang meja adalah pangkat tiga dari lebarnya ditambah satu.
tentukan aturan fungsinya. Apakah fungsinya merupakan fungsi polinom?
jika lebar yang digunakan adalah 1.5 m, berapakah panjang meja tersebut?
Penyelesaian:
a. Misalkan panjang meja p dan lebar meja l, maka aturan fungsinya dapat ditulis: $p = f(l) = l^3 + 1$. Fungsinya adalah polinom karena memuat satu variabel l dengan pangkat 3 yang merupakan bilangan bulat positif.
b. Untuk setiap nilai l yang diberikan, kita dapat mencari nilai p, yaitu:
   $l = 1.5$, maka $p = f(1.5) = (1.5)^3 + 1 = 3.375 + 1 = 4.375$,
   jadi panjang meja 4.375 m

Apabila daerah asal dan daerah hasil fungsi adalah bilangan, kita dapat menggambarkan grafik fungsi polinomial pada bidang koordinat dengan cara sederhana berikut:
1. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan
2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut melalui kurva mulus

Penugasan 3

1. Gambarkan grafik persamaan garis lurus berikut dalam satu bidang koordinat
   a. y = x dan y = -x
   b. y = 2x dan y = -0.5x + 2
   c. y = 2x +1 dan y = -0.5x – 1
   d. y = 2 dan x = 1
   Apa kesimpulan yang kamu peroleh dari grafik-grafik tersebut?
2. Gambarkan grafik dari fungsi polinom berikut
   a. $y = x^2$ dan $y = -x^2$
   b. $y = x^2 + x$ dan $y = -x^2 + x$
   c. $y = x^3 + 3$ dan $y = -x^3 + 1$
   Apa kesimpulan yang kamu peroleh dari grafik-grafik tersebut?

Contoh 4:

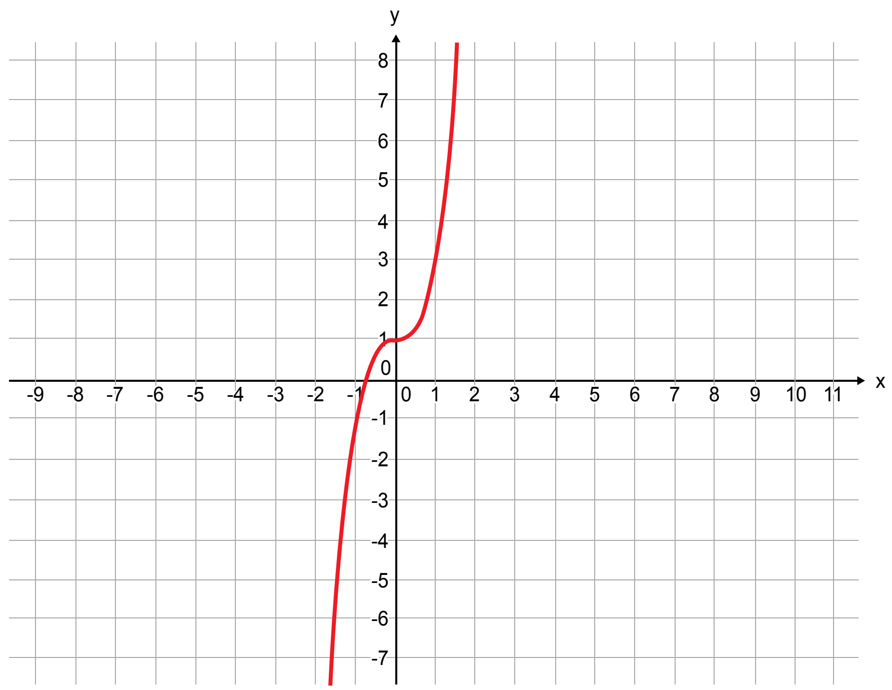
Gambarkan persamaan $y = 2x^3 + 1$

Penyelesaian:

Tabel nilai

x	-2	-1	0	1	2
y	-15	-1	1	3	17

Dengan menghubungkan pasangan titik-titik tersebut kita peroleh grafiknya berbentuk kurva berikut.



Dari grafik tersebut terlihat bahwa semakin kecil (negatif) nilai x maka nilai fungsi juga kecil. Grafik memotong sumbu x pada di satu titik. Nilai x di mana nilai fungsi adalah nol disebut dengan pembuat nol fungsi, yang dapat dicari sebagai berikut

y = 0, maka $f(x) = 0$, sehingga diperoleh persamaan polinom

$0 = 2x^3 + 1$, diperoleh

Contoh 6:

Sebuah fungsi polinom didefinisikan sebagai

$$p(x) = 3x^4 + 2x^2 - x = -1/\sqrt[3]{2}$$

a. Tentukan nilai f(0) dan f(-2)
b. Tentukan pembuat nol fungsi, yaitu nilai x agar nilai fungsi menjadi nol
c. Gambarkan grafik fungsi p tersebut pada bidang koordinat.

Penyelesaian:

a. Dari fungsi yang didefinisikan diperoleh

$$p(0) = 3(0)^4 + 2(0)^2 – 1$$
$$= -1$$
$$p(-1) = 3(-1)^4 + 2(-1)^2 – 1 = 3 + 2 -1$$
$$= 4$$

b. Agar nilai fungsi menjadi nol, diperoleh

$$p(x) = 0$$

Akibatnya, diperoleh persamaan polinom

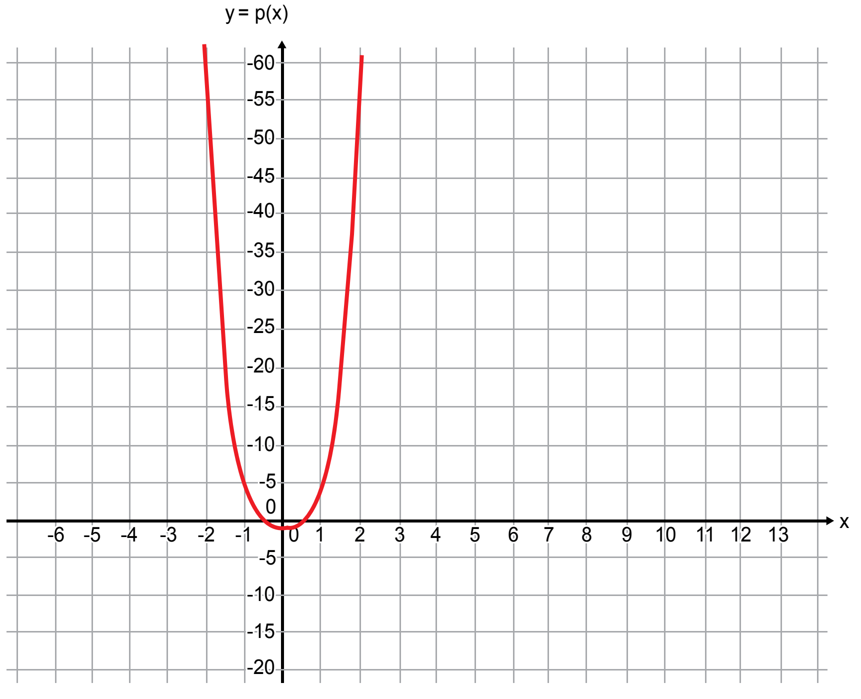
$$0 = 3x^4 + 2x^2 - 1$$

Misalkan $z=x^2$, maka kita dapat mengubah persamaan polinom tersebut ke bentuk persamaan kuadrat, yaitu:

$$0 = 3x^4 + 2x^2 - 1$$
$0 = 3z^2 + 2z – 1$, kita faktorkan sehingga diperoleh
$$0 = (3z – 1)(z + 1)$$
Diperoleh, $0 = 3z – 1$ atau $0 = z + 1$
$z = 1/3$ atau $z = -1$
$x^2 = 1/3$ atau $x^2= -1$, (tidak ada akar real)
$x = 1/\sqrt{3}$ atau $x= -1\sqrt{3}$

Jadi, pembuat nol fungsi adalah $x= 1/\sqrt{3}$ dan $x= -1\sqrt{3}$

c. Sketsa grafik fungsi polinom tersebut adalah sebagai berikut



Latihan 1

1. Sebuah fungsi polinom didefinisikan sebagai $f(x) = x^3 - 3x$
   a. Tentukan f(0) dan f(2).
   b. Tentukan nilai x agar f(x) = 0.
   c. Gambarkan fungsi tersebut dalam bidang koordinat.
2. Sebuah fungsi polinom didefinisikan sebagai $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
   a. Tentukan f(0) dan f(-3).
   b. Tentukan nilai x agar f(x) = 0.
   c. Gambarkan fungsi tersebut dalam bidang koordinat.
3. Sebuah fungsi kuadrat didefinisikan sebagai $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
   a. Tentukan f(0) dan f(2)
   b. Adakah nilai x sehingga f(x) = 0? Jelaskan.
   c. Gambarkan fungsi tersebut dalam bidang koordinat.
4. Sebuah fungsi polinom didefinisikan sebagai $f(x) = ax^3 + bx + c$ dengan a, b, dan konstan. Grafik fungsi tersebut memotong sumbu y di (0, -4) serta memotong sumbu x di (-1, 0) dan (2, 0).
   a. Tentukan fungsi polinom tersebut.
   b. Tentukan nilai x agar f(x) = -8.
   c. Gambarkan grafik fungsi tersebut.
5. Fungsi polinom $f(x) = 2x^3 - x$ berpotongan dengan fungsi polinom $h(x) = x^3 + 2x^2 - x$.
   a. Tentukan nilai x agar f(x) = 0.
   b. Tentukan nilai x agar h(x) = 0.
   c. Tentukan titik potong grafik fungsi f dan fungsi h
   d. Gambarkan grafik fungsi f dan fungsi h dalam satu bidang koordinat.
6. Garis l dengan persamaan y = 3x + 8 berpotongan dengan kurva $y = 2x - x^2$.
   a. Tentukan titik potong garis l dan kurva y.
   b. Gambarkan garis l dan kurva y dalam satu bidang koordinat.
7. Sebuah garis menyinggung kurva $y = 2x - x^2 + 5$ pada x = 2.
   a. Tentukan titik singgung kurva y tersebut.
   b. Gambarkan garis dan kurva y tersebut dalam satu bidang koordinat.
8. Grafik fungsi polinom derajat 3 memotong sumbu x di x di (-1, 0), sumbu y di titik (0, 4), titik (1, 4), dan (-2, -20)
   a. Misalkan fungsi polinom adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c konstan. Tentukan nilai c.
   b. Tentukan fungsi polinom tersebut dan tentukan nilai fungsi untuk x = 2.
   c. Gambarkan grafik fungsi polinom tersebut.
9. Sebuah garis memotong grafik fungsi polinom derajat 2 di titik (3, 4) dan titik (9, 12).
   a. Tentukan persamaan garis tersebut.
   b. Apabila fungsi polinom memotong sumbu y di titik (0, 6), tentukan fungsi polinom tersebut.
10. Fungsi polinom $f(x) = 2x - 2x^2$ berpotongan dengan fungsi polinom $h(x) = x^2 + 4x - 9$.
   a. Tentukan nilai x agar f(x) = 0.
   b. Tentukan nilai x agar h(x) = 0.
   c. Tentukan titik potong grafik fungsi f dan fungsi h.
   d. Gambarkan grafik fungsi f dan fungsi h dalam satu bidang koordinat.

Latihan 2

1. Untuk $f(x) = 4x^4 - 5$, hitunglah:
   a. f(1)
   b. f(0)
   c. f(-1)
   d. f(-2)
   e. f(k)
   f. f(2t + 1)
2. Untuk $g(t) = 5x^3 - 5$, hitunglah:
   a. g(-1)
   b. g(1.5)
   c. g(x)
   d. $g(\sqrt{3})$
   e. g(2x)
   f. g(0)
3. Kecepatan sebuah partikel adalah $v = t^2 + 1$, dengan v kecepatan (dalam km/jam) pada saat waktu t jam.
   a. Tentukan fungsi jarak tempuh, s, terhadap waktu tempuhnya, t. Apakah fungsi s tersebut merupakan fungsi polinom
   b. Berapa jarak yang ditempuh partikel tersebut setelah 315 menit?
   c. Berapa waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak 410 km?
4. Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Ketinggian peluru (dalam meter) setelah t detik diberikan oleh fungsi $h(t) = 310t - 5t^2$. Tentukan ketinggian peluru, setelah:

a. 11 detik ditembakkan.
b. 51 detik ditembakkan.
c. 61 detik ditembakkan.
Dapatkah kamu menyimpulkan, berapa lama peluru di udara?

5. Gambarkan grafik berikut dalam bidang koordinat.
   a. $y = 3x^3 + 3$
   b. $y = -3x^3 + 3$
   c. $f(x) = 3x - x^3$
   d. $h(x) = x^4 + 1$
   e. $y = x^4$
   f. $x + y^3 = 5$
6. Ongkos operasi sebuah mobil diberikan oleh fungsi $C = 510x + 3100$ rupiah, di mana x jarak yang ditempuh mobil tersebut (dalam km).
   a. Gambarkan grafik fungsinya
   b. Apabila setiap hari mobil tersebut menempuh jarak 110 km, berapa rupiah ongkos operasi per harinya?
   c. Berapa jarak yang dapat ditempuh mobil tersebut agar ongkos operasinya di bawah Rp 33.100,00 per hari?
7. Gambarkan grafik tiga persamaan polinom yang melewati (2, 3) dan (-3, -2)
8. Tentukan tiga persamaan kuadrat yang melewati:
   a. (1, 1) dan (5, 5)
   b. (1, 1) dan (-1, 0)

UNIT 2 PEMBAGIAN DAN FAKTORISASI POLINOM

Perhatikan pembagian berikut.

$$\frac{9}{2} = 4 \text{ sisa } 1$$

Kita sebut 9 adalah bilangan yang dibagi, 2 adalah bilangan pembagi, 4 adalah bilangan hasil bagi dan 1 adalah bilangan sisa pembagian. Dari bentuk pembagian tersebut, dapat dituliskan

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

Kita juga dapat melakukan operasi aljabar antara dua polinom seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Bagaimana melakukan operasi pembagian polinom dengan polinom lain? Apabila derajat penyebut lebih kecil atau sama dengan pembilang, kita dapat menyederhanakannya. Suatu polinom p(x) dapat dibagi dengan polinom lainnya g(x) dengan derajat lebih kecil dan hasilnya h(x) serta sisa pembagian adalah s(x), yaitu:

$$h(x) = \frac{p(x)}{g(x)} \text{ sisa } s(x), \text{ atau } p(x) = g(x)h(x) + s(x)$$

Contoh 1:
Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 6$ dibagi dengan $x + 2$.

Penyelesaian:
Apabila dilakukan dengan cara pembagian bersusun, diperoleh

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 7x + 15 \\ \hline
x + 2 & 2x^3 - 3x^2 + x + 6 \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2} \\
 & \quad -7x^2 + x + 6 \\
 & \quad \underline{-7x^2 - 14x} \\
 & \qquad 15x + 6 \\
 & \qquad \underline{15x + 30} \\
 & \qquad\quad -24
\end{array}$$

Hasil bagi adalah $2x^2 - 7x + 15$ dan sisa pembagian -24.

Contoh 2:

Tentukan hasil bagi $P(x) = 4x^4 - x^3 + 3x - 7$ dengan $Q(x) = x^2 - x + 1$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode pembagian susun pendek, diperoleh

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 + 3x - 1 \\
\hline
x^2 - x + 1 & 4x^4 - x^3 + 3x - 7 \\
 & \underline{4x^4 - 4x^3 + 4x^2} \; - \\
 & \quad 3x^3 - 4x^2 + 3x - 7 \\
 & \quad \underline{3x^3 - 3x^2 + 3x} \; - \\
 & \qquad -x^2 - 7 \\
 & \qquad \underline{-x^2 + x - 1} \; - \\
 & \qquad\quad -x - 6
\end{array}
$$

Jadi, hasil bagi $H(x) = 4x^2 + 3x - 1$ dan sisa pembagian $S = -x - 6$. Dapat dituliskan

$$\frac{4x^4 - x^3 + 3x - 7}{x^2 - x + 1} = 4x^2 + 3x - 1 + \frac{-x - 6}{x^2 - x + 1}$$

Dari pembagian tersebut dapat dirumuskan bahwa

$$\text{Pembagian dua polinomial} = \text{hasil bagi} + \frac{\textit{sisa pembagian}}{\textit{pembagi}}$$

Pembagian Suku Banyak dengan Cara Horner

Contoh 1:

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari polinom $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ dibagi dengan $x - 5$

Penyelesaian:

Kita menyelesaikan pembagian polinom tersebut dengan menggunakan skema atau aturan Horner sebagai berikut

Koefisien polinom yang dibagi

Konstata pembagi				
5	1	2	3	−4
		5	35	190 +
	1	7	38	$\boxed{186}$

Koefisien hasil bagi — Sisa pembagian

1. Pembagi merupakan bentuk linear x + 5
2. Dari bentuk pembagi, tuliskan x - 5 = 0 sehingga diperoleh x = 5. Jadikan sebagai bilangan pembagi
3. Koefisien polinom ditaruh dalam satu baris yang akan dibagi
4. Koefisien pada variabel dengan derajat polinom tertinggi, yaitu 1 kita turunkan ke hasil bagi
5. Perkalian konstata pembagi dan koefisien hasil bagi, 5 1 = 5. Hasilnya ditaruh di bawah koefisien 2.
6. Jumlahkan koefisien polinom yang dibagi dengan 5, 2 + 5 = 7
7. Perkalian 7 5 = 35. Jumlah 3 + 35 =38
8. Perkalian 38 5 = 190. Jumlah -4 + 190 = 186

Jadi hasil bagi adalah x2 + 7x + 38 dan sisa pembagian 186

Contoh 2:

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari polinom $p(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 4$ dibagi dengan $2x - 5$

Penyelesaian:

1. Kita menyelesaikan pembagian polinom tersebut dengan menggunakan skema atau aturan Horner sebagai berikut.
2. Pembagi merupakan bentuk linear 2x – 5. Ubah menjadi 2(x – 2.5). Polinom diubah menjadi ke bentuk $4x^3 + x^2 - 3x + 4 = 2(2x^3 + 0.5x^2 - 1.5x + 2$
3. Dari bentuk pembagi, tuliskan x – 2.5 = 0 sehingga diperoleh x = 2.5. Jadikan 2.5 sebagai bilangan pembagi dan 2 sebagai faktor
4. Koefisien polinom $2x^3 + 0.5x^2 - 1.5x + 2$ ditaruh dalam satu baris yang akan dibagi
5. Koefisien pada variabel dengan derajat polinom tertinggi, yaitu 2 kita turunkan ke hasil bagi
6. Perkalian konstata pembagi dan koefisien hasil bagi, 2.5 2 = 5. Hasilnya ditaruh di bawah koefisien 0.5.
7. Jumlahkan koefisien polinom yang dibagi dengan 5, 0.5 + 5 = 5.5
8. Perkalian 2.5 5.5 = 13.75. Jumlah -1.5 + 13.75 =12.25
9. Perkalian 2.5 12.25 = 30.625. Jumlah 2 + 30.625 = 32.625
10. Perkalian 32.625 dengan faktor 2, 32.625 2 = 65.25

Jadi, hasil bagi adalah 2x2 + 5.5x + 12.25 dan sisa pembagian 65.25

2	2.5	2	0.5	-1.5	2	
			5	13.75	30.625	+
		2	5.5	12.25	$\boxed{32.625}$	x 2
					$\boxed{65.25}$	

Teorema Sisa

Suku banyak p(x) dibagi dengan x – k, maka sisanya adalah p(k)

Bukti: p(x) = h(x)g(x) + s(x) di mana s sisa pembagian dan g pembagi
= h(x)(x – k) +s(x)
p(k) = h(k)(k – k) + s(k) = s(k)
Jadi, sisa pembagian adalah p(k).

Contoh 3:
Tentukan sisa pembagian suku banyak $p(x) = 2x^4 + 5x^2 - x + 2$ oleh x + 1
Jawab:
Berdasarkan teorema sisa, maka sisa pembagian adalah
$p(-1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^2 - (-1) + 2 = 2 + 5 + 1 + 2 = 7 + 3 = 10$

Contoh 4:
Tentukan sisa pembagian $P(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ oleh x – 2.
Penyelesaian:
Dengan menggunakan teorema sisa, diperoleh
$P(2) = (2)^4 - (2)^2 + 2 + 1 = 16 - 4 + 3 = 15$
Jadi, sisa pembagian adalah 15

Contoh 5:
Sisa pembagian suku banyak p(x) oleh $x^2 + 6x - 16$ adalah 4x – 5. Tentukan sisa pembagian p(x) oleh x – 2 dan nilai dari p (-8)
Jawab:
Kita tuliskan hasil bagi $h(x) = p(x)/(x^2 + 6x - 16)$ sisa 4x – 5, sehingga diperoleh
$p(x) = h(x)(x^2 + 6x - 16) + 4x - 5$

Sisa pembagian adalah
$p(2) = h(2)[2^2 + 6(2) - 16] + 4(2) - 5 = h(2)\ 0 + 3 = 3$

Menentukan nilai p(-8)
$p(-8) = h(-8)[(-8)^2 + 6(-8) - 16] + 4(-8) - 5 = h(-8)\ 0 + -37 = -37$

Penugasan

a. Tunjukkan bahwa sisa pembagian polinom p(x) oleh ax + b adalah p(-b/a)
b. Bagaimana menghitung sisa pembagian dari suatu polinom yang dibagi dengan polinom lain dengan derajat lebih tinggi? Jelaskan.
c. Buktikan bahwa sisa pembagian suku banyak p(x) oleh (x – a)(x – b) adalah

$$s = \frac{x-b}{a-b}\,p(a) + \frac{x-b}{b-a}\,p(b)$$

Contoh 6:
Tentukan sisa pembagian $P(x) = x^4 - x^2 + 4x + 1$ oleh (x – 2)(x + 1)
Penyelesaian:
Misalkan sisa pembagian mx + n. Dengan menggunakan teorema sisa, diperoleh

$P(2) = (2)^4 - (2)^2 + 4(2) + 1 = 16 - 4 + 9 = 21$
$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1 - 1 + -4 + 1 = -3$
$m = [P(2) - P(-1)]/(2 - (-1)) = (21 - (-3))/3 = 8$
$n = P(2) - m(2) = 21 - 16 = 5$
Jadi, sisa pembagian adalah mx + n = 8x + 5

Faktor dari suatu ekspresi matematika adalah bilangan, variabel, konstata, suku, atau ekspresi matematika lainnya, yang membagi habis ekspresi matematika tersebut. Perhatikan bahwa setiap bentuk atau ekspresi matematika memiliki minimal 2 faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri, seperti contoh pada tabel berikut.

No	Bentuk Aljabar	Faktor
1	3ab	3, a, b, 1, dan 3ab
2	$3x(x^2 + 1)$	3, x, $x^2 + 1$, 3x, 1, dan $3x(x^2 + 1)$
3	$a^2 + ab$	a, a + b, 1, dan $a^2 + ab$
4	$a^2b + ab$	a, b, ab, a + 1, 1, dan $a^2b + ab$

Apa yang terjadi jika sisa pembagian suku banyak oleh suku lain adalah nol?. Hal ini memberi gagasan tentang teorema faktor berikut.

Teorema Faktor

1. Suku banyak $p(x)$ memiliki faktor $x – k$ jika dan hanya jika $p(k) = 0$.
2. Apabila $x – k$ adalah faktor dari polinom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, maka nilai yang mungkin dari k adalah pembagian dari fackor a_0 dan faktor a_n

Contoh 7:
Apakah $x + 1$ membagi habis polinom $P(x) = x^3 – x^2 + 2x + 4$?
Penyelesaian:
Dengan menggunakan teorema faktor, diperoleh

$$P(-1) = (-1)^3 – (-1)^2 + 2(-1) + 4 = -1 – 1 – 2 + 4 = 0$$

Jadi, $x + 1$ membagi habis $x^3 – x^2 + 2x + 4$ sehingga dapat dituliskan

$$x^3 – x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(x^2 – 2x + 4)$$

Contoh 8:
Apakah $(x – 1)(x + 2)$ merupakan faktor dari $P(x) = x^4 + x^3 – x^2 + x – 2$?
Penyelesaian:
Dengan menggunakan teorema faktor, diperoleh

$P(1) = (1)^4 + (1)^3 – (1)^2 + (1) – 2 = 1 + 1 – 1 + 1 – 2 = 0$, dan

$P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 – (-2)^2 + (-2) – 2 = 16 – 8 – 4 – 2 – 2 = 0$

Jadi, $(x – 1)(x + 2)$ merupakan faktor dari $x^4 + x^3 – x^2 + x – 2$, sehingga dapat dituliskan

$$x^4 + x^3 – x^2 + x – 2 = (x – 1)(x + 2)(x^2 + 1).$$

Contoh 9:
Tunjukkan polinom $p(x) = x^3 + 2x^2 – x – 2$ memiliki faktor $x + 2$.
Jawab:

$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 – (-2) – 2 = -8 + 8 + 2 – 2 = 0.$

Jadi, salah satu faktor dari $p(x)$ adalah $x +2$

Contoh 10:
Tunjukkan $p(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1$ memiliki factor $2x + 1$.
Jawab:
Bentuk $2x + 1$ dapat diubah ke bentuk $2(x + 0.5)$ dan $p(x)$ dapat diubah ke bentuk $p(x) = 2h(x) = 2(x^3 + 0.5x^2 – x – 0.5)$ sehingga

$$\begin{aligned} h(-0.5) &= (-0.5)^3 + 0.5(-0.5)^2 – (-0.5) – 0.5 \\ &= -0.125 +0.125 + 0.5 – 0.5 = 0 \end{aligned}$$

Maka $x + 0.5$ adalah faktor dari $h(x)$ atau $2(x + 0.5) = 2x + 1$ adalah faktor dari polinom $p(x) = 2h(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1$

Contoh 11:
Dua buah kubus mempunyai selisih panjang rusuk 3cm. Jika jumlah volume kedua kubus adalah 637cm^3, maka tentukan jumlah kedua luas permukaannya?
Jawab:
Misal kubus yang besar rusuknya y cm dan kubus kecil berusuk x cm, maka $y = x + 3$. Jumlah volume kedua kubus adalah 637 cm^3, yaitu

$$\begin{aligned} 637 &= x^3 + y^3 = x^3 + (x + 3)^3 = x^3 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ 0 &= 2x^3 + 9x^2 + 27x - 610 \end{aligned}$$

Untuk mencari akar-akar rasional tersebut, kita bentuk polynomial $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 27x – 610$. Faktor dari koefisien 2 adalah 1 dan 2, serta faktor dari konstata 610 adalah 1, 2, 5 dan 61. Kita coba nilai $p(x)$

$p(1) = 2(1)^3 + 9(1)^2 + 27(1) – 610 \neq 0$

$p(5) = 2(5)^3 + 9(5)^2 + 27(5) – 610 = 0$

Jadi, $x – 5$ merupakan faktor $p(x)$. Melalui pembagian dengan cara Horner berikut

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 9 & 27\ - & 610 \\ 5 & & 10 & 95 & 610 \\ \hline & 2 & 19 & 122 & \boxed{0} \end{array}$$

Diperoleh $0 = (x – 5)(2x^2 + 19x + 122)$. Jadi $x = 5$ atau $2x^2 + 19x + 122 = 0$ yang tidak memiliki akar real. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$. Panjang rusuk kedua kubus adalah 5 cm dan 8 cm
Jumlah luas kedua permukaan kubus adalah $6x^2 + 6y^2 = 6(5^2 + 8^2)$ cm^2 = $6(25 + 64)$ cm^2 = 534 cm^2

Contoh 12:
Seorang peneliti merancang sebuah wadah berbentuk balok dari bahan alumunium. Wadah tersebut harus mampu menampung 4.000 ml larutan. Peneliti mengingikan lebar wadah 5 cm lebih pendek dari panjangnya dan tinggi wadah 17 cm lebih pendek dari panjangnya. Dengan memisalkan panjang wadah x cm diperoleh volume wadah V = 4.000 ml = 4.000 cm^3, yaitu:

V = panjang lebar tinggi = $x.(x – 5)(x – 17) = 4.000$, atau

$x^3 – 22x^2 + 85x – 4.000 = 0.$

Dapatkah Anda menentukan nilai x yang memenuhi persamaan tersebut?
Persamaan $x^3 – 22x^2 + 85x – 4.000 = 0$ merupakan persamaan suku banyak.

Penyelesaian:

Kita coba berbagai fungsi polynomial $V(x) = x^3 - 22x^2 + 85x - 4.000$, diperoleh

$$V(10) = (10)^3 - 22(10)^2 + 85(10) - 4.000 = -4350$$
$$V(20) = (20)^3 - 22(20)^2 + 85(20) - 4.000 = -3100$$
$$V(25) = (25)^3 - 22(25)^2 + 85(25) - 4.000 = 0$$

Diperoleh $x - 25$ merupakan faktor dari $V(x)$, dapat dituliskan

$$V(x) = (x - 25)(x^2 + 3x + 160)$$

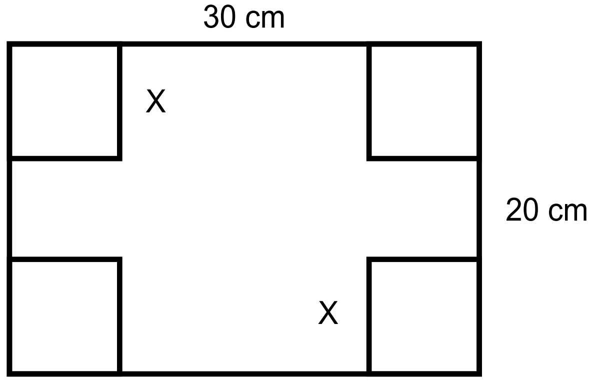
Untuk $V = 0$, diperoleh akarnya $x = 25$ atau $x^2 + 3x + 160 = 0$ yang tidak memiliki aka real. Jadi ukuran wadah tersebut adalah 25 cm, 20 cm, dan 8 cm.

Latihan 1

1. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$ oleh:
   a. $x - 1$
   b. $2x + 3$
   c. $x^2 + x$
   d. $(x - 1)(x + 2)$
   e. $x^3 - x$
2. Dengan menggunakan teorema sisa, tentukan sisa pembagiannya:
   a. $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 4$ dibagi $x - 1$
   b. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$ dibagi $(x - 1)(x + 1)$
   c. $P(x) = 4x^4 - 2x^2 + x + 4$ dibagi $x^2 + x$
3. Dengan menggunakan teorema faktor, tentukan apakah suku banyak berikut dapat difaktorkan:
   a. $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$
   b. $P(x) = -x^3 + 4x^2 + 5x - 20$
   c. $P(x) = 4x^4 - 2x^2 + x + 4$
   d. $P(x) = x^2 - x^3 + 1$
4. Diberikan suku banyak $P(x) = x^2 + 2x - x^3 + 2$.
   a. Apabila $P(x)$ habis dibagi oleh $x - a$. Tentukan nilai a
   b. Apabila $P(x)$ habis dibagi oleh $2x + b$. Tentukan nilai b
5. Diberikan suku banyak $P(x) = 2x^3 - 2x + b$.
   a. Apabila $P(x)$ habis dibagi oleh $x + 2$. Tentukan nilai b
   b. Apabila $P(x)$ habis dibagi oleh $2x - 1$. Tentukan nilai b
6. Diberikan suku banyak $P(x) = ax^3 - 2x + b$.
   a. Tentukan nilai a dan b agar $P(x)$ dibagi $x + 2$, sisanya 5 dan dibagi oleh $x - 1$ sisanya,3.
   b. Tentukan nilai a dan b agar $P(x)$ habis dibagi $x + 2$
7. Misalkan $P(x) = 4x^5 - 2x^3 + x + 4$ dibagi $x^3 + x - 1$. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagiannya.

Latihan 2

1. Panjang rusuk sebuah balok merupakan 3 bilangan berturutan. Apabila volume balok 24 cm^3, tentukan luas permukaan balok tersebut
2. Jika $a + b = 3$ dan $a^2 + b^2 = 5$, tentukan
   a. Nilai a dan b
   b. Tentukan nilai $a^3 + b^3$
3. Seorang peneliti mengamati perkembangbiakan bakteri pada makanan yang bersisa. Banyak bakteri pada menit ke-n memenuhi persamaan polinom derajat 3. Jumlah bakteri pada menit ke- 1 sampai menit ke-3 adalah 7, 18 dan 53. Tentukan:
   a. Fungsi polinom perkembangbiakan bakteri
   b. Banyak bakteri pada menit ke-4
4. Jika $a + b = 0$, tunjukkan bahwa $a^2 + b^2 = -2ab$
5. Sebuah karton berbentuk persegi panjang dengan ukuran 30 cm × 20 cm. Karton tersebut akan dibentuk menjadi kotak terbuka dengan cara memotong ujung dari tiap karton berbentuk persegi dengan sisi x seperti gambar berikut



   a. Apabila panjang karton p, lebar karton l dan tinggi karton t, nyatakan p, l, t dalam x
   b. Tentukan volume kotak V yang terjadi dinyatakan dalam x
   c. Gambarkan grafik V terhadap x
   d. Berapakah volume kotak maksimum yang dapat dibuat

Rangkuman

1. Bentuk polinomial merupakan ekspresi matematika yang memuat satu variabel dengan variabel berpangkat bilangan bulat positif
2. Sebuah *fungsi polinomial* p adalah aturan yang memadankan tiap objek atau variabel x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) sebagai variabel tak bebas dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*) di mana p(x) merupakan bentuk polinomial
3. Bentuk umum fungsi polinomial derajat n dapat dinyatakan sebagai $y = f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_0, a_1, ..., a_n$ koefisien; a_n 0; dan n bilangan bulat positif
4. Fungsi kuadrat adalah fungsi polynomial derajat 2 berbentuk $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabol
5. Fungsi linear satu variabel adalah fungsi polinom derajat 1 berbentuk $y = a_0 + a_1x$. Grafik fungsi linear satu variabel berbentuk garis lurus
6. Fungsi konstan adalah fungsi polinom derajat 0 berbentuk $y = a_0$. Grafik fungsi konstan berupa garis lurus mendatar.
7. Suatu polinom p(x) dapat dibagi dengan polinom lainnya g(x) dengan derajat lebih kecil dan hasilnya h(x) serta sisa pembagian adalah s(x), yaitu:

$$\text{Pembagian dua polinomial} = \text{hasil bagi} + \frac{\textit{sisa pembagian}}{\textit{pembagi}}$$

$$h(x) = \frac{p(x)}{g(x)} \text{ sisa } s(x), \text{ atau } p(x) = g(x)h(x) + s(x)$$

8. Pembagian fungsi polinom dengan cara Horner dapat diilustrasikan melalui contoh pembagian polinom $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ dibagi dengan x - 5

Koefisien polinom yang dibagi

Konstata pembagi	5	1	2	3	−4
			5	35	190
		1	7	38	$\boxed{186}$

Koefisien hasil bagi Sisa pembagian

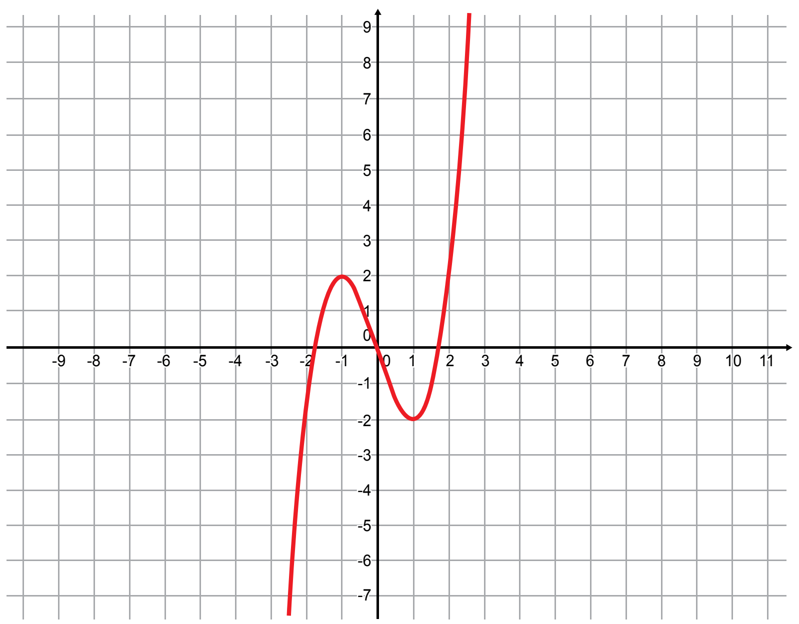
a. Pembagi merupakan bentuk linear x + 5
b. Dari bentuk pembagi, tuliskan x - 5 = 0 sehingga diperoleh x = 5. Jadikan sebagai bilangan pembagi
c. Koefisien polinom ditaruh dalam satu baris yang akan dibagi
d. Koefisien pada variabel dengan derajat polinom tertinggi, yaitu 1 kita turunkan ke hasil bagi
e. Perkalian konstata pembagi dan koefisien hasil bagi, 5 1 = 5. Hasilnya ditaruh di bawah koefisien 2.
f. Jumlahkan koefisien polinom yang dibagi dengan 5, 2 + 5 = 7
g. Perkalian 7 5 = 35. Jumlah 3 + 35 =38
h. Perkalian 38 5 = 190. Jumlah -4 + 190 = 186
i. Jadi hasil bagi adalah $x^2 + 7x + 38$ dan sisa pembagian 186
j. Suku banyak p(x) dibagi dengan x – k, maka sisanya adalah p(k)
k. Suku banyak p(x) memiliki faktor x – k jika dan hanya jika p(k) = 0. Apabila x – k adalah factor dari polinom $p(x) = a_0 + a_1x + … + a_nx^n$, maka nilai yang mungkin dari k adalah pembagian dari factor a_0 dan factor a_n

Kunci Jawaban

UNIT 1: Fungsi Dan Persamaan Polinomial

Latihan 1

1. Definisi fungsi $f(x) = x^3 - 3x$
   a. Nilai $f(0) = (0)^3 - 3(0) = 0$ dan $f(2) = (2)^3 - 3(2) = 2$
   b. $f(x) = 0$, maka $0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - 3)(x + 3)$ sehingga $x = 0$ atau $x = 3$ atau $x = -3$
   c. Grafik fungsi

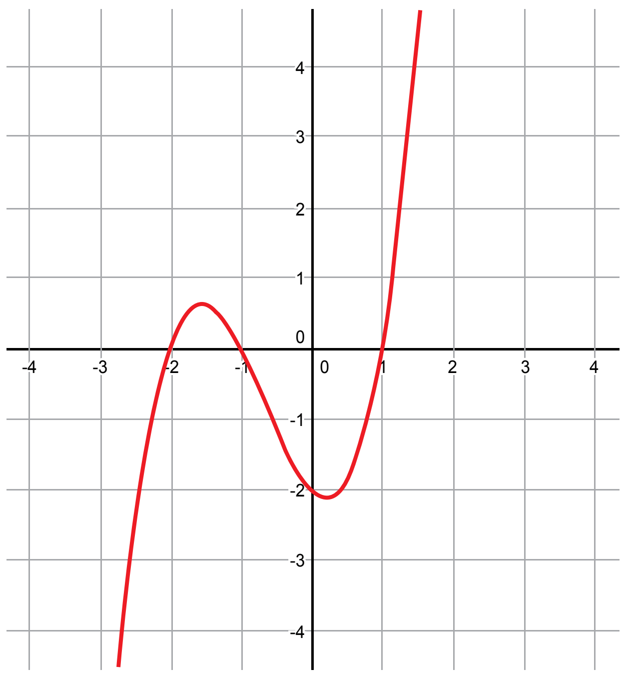


Pembahasan:

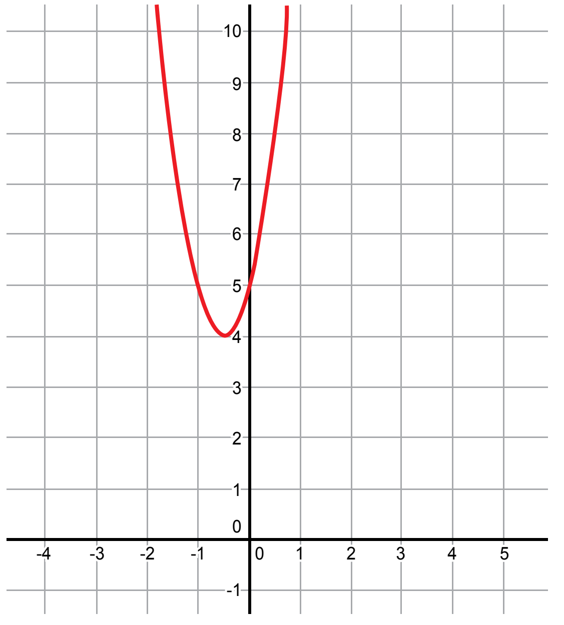
Nilai fungsi dicari dengan memasukkan nilai variabel dan selanjutnya dihitung nilai fungsinya. Mencari pembuat nol fungsi sama artinya dengan mencari akar dari persamaan yang diberikan. Pencarian akar dilakukan dengan menggunakan sifat perkalian dan menentukan faktor nolnya, yaitu apabila $ab = 0$, diperoleh $a = 0$ atau $b = 0$.

Untuk menggambar atau membuat sketsa grafik fungsi $y = f(x)$ dibuat dengan menghubungkan beberapa titik dengan kurva mulus (termasuk titik potong dengan sumbu koordinat jika memungkinkan).

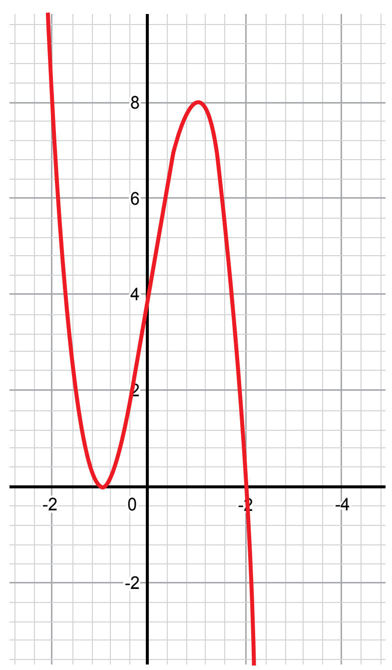
2. Definisi fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
   a. Nilai $f(0) = (0)^3 + 2(0)^2 - (0) - 2 = -2$ dan
   $f(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - (-3) - 2 = -8$
   Menurut teorema faktor $f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$,
   $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$, dan $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 0$
   b. Maka, $x + 2$, $x + 1$, dan $x - 1$ adalah faktor dari $f(x)$, sehingga akar dari $f(x) = 0$ dapat dituliskan dalam bentuk $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$. Jadi, $x = -2$ atau $x = 1$ atau $x = -1$
   c. Grafik fungsi dalam bidang koordinat adalah



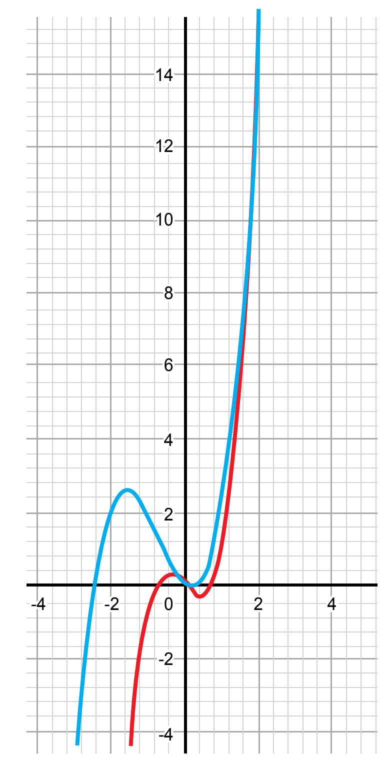
3. Definisi fungsi $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
   a. $f(0) = 4(0)^2 + 4(0) + 5 = 5$ dan $f(2) = 4(2)^2 + 4(2) + 5 = 29$
   b. Dari $0 = 4x^2 + 4x + 5$, diperoleh diskriminan $d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(5) = -64$. Jadi tidak ada akar real dari persamaan kuadrat tersebut.
   c. Fungsi kuadrat tersebut tidak memotong sumbu x. Grafiknya adalah sebagai berikut.



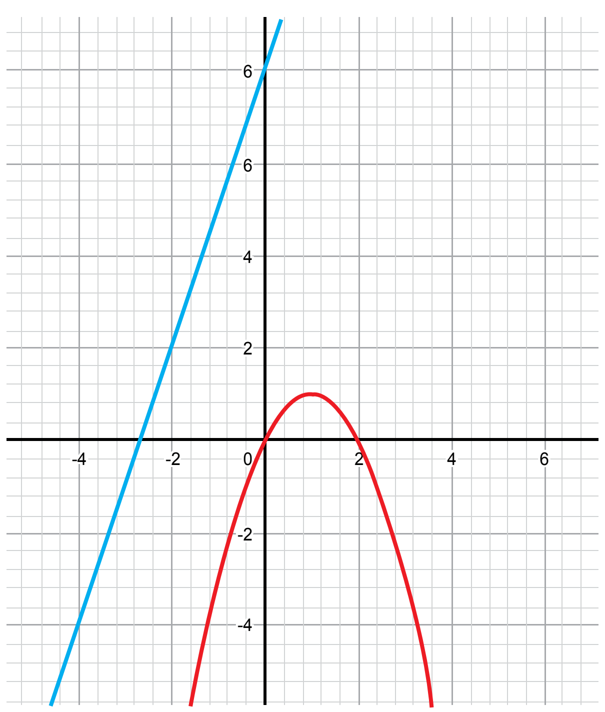
4. a. Grafik memotong di (0, -4), maka $4 = a(0)^3 + b(0) + c = c$ (1)
   Grafik memotong di (-1, 0), maka $0 = a(-1)^3 + b(-1) + c = -a - b + c$ (2)
   Grafik memotong di (2, 0), maka $0 = a(2)^3 + b(2) + c = 8a + 2b + c$ (3)
   Dengan menggunakan metode substitusi dan eliminasi dari sistem persamaan linear (1), (2) dan (3) diperoleh c = 4, a = -2 dan b = 6
   Fungsi polinom adalah $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$
   b. $f(x) = -8$, maka $-2x^3 + 6x + 4 = -8$ sehingga $-2x^3 + 6x + 12 = 0$ atau $-x^3 + 3x + 6 = 0$. Untuk $x = 2$, diperoleh $-(2)^3 + 3(2) + 6 = 4$ (positif) dan untuk $x = 3$, diperoleh $-(3)^3 + 3(3) + 6 = -8$ (negatif) sehingga agar $f(x) = -8$, maka nilai x memenuhi $2 < x < 3$.
   c. Grafik $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$ adalah sebagai berikut.



5. a. $f(x) = 0$, maka $f(x) = 2x^3 - x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, atau $x = 1/\sqrt{2}$, atau $x = -1/\sqrt{2}$
   b. $h(x) = 0$, maka $h(x) = x^3 + 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, atau $x = -1 + \sqrt{2}$, atau $x = -1 - \sqrt{2}$
   c. f dan g berpotongan, maka $2x^3 - x = x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 2$. Jadi titik potong kedua fungsi di (0, 0) dan (2, 14)
   d. Grafik fungsi f dan h adalah sebagai berikut.

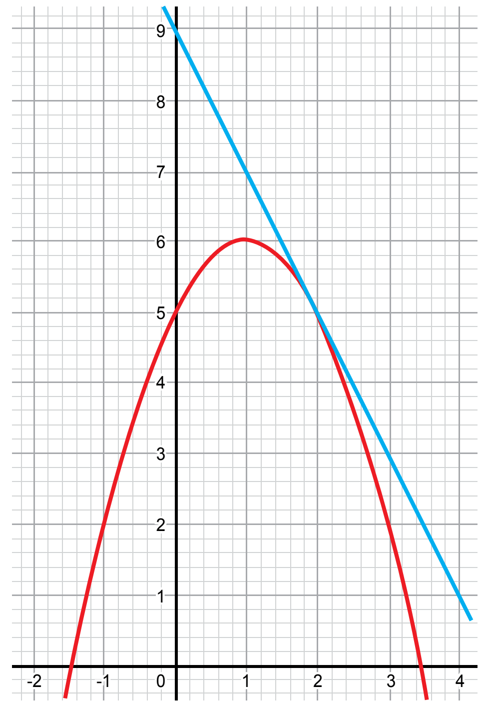


6. a. Garis l dan kurva y berpotongan, maka $3x + 8 = 2x - x^2$ sehingga diperoleh persamaan kuadrat $x^2 + x + 8 = 0$. Diskriminan $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(8) = -31$ sehingga garis l dan kurva y tidak berpotongan.
   b. Grafik garis l dan kurva y dalam satu bidang koordinat



7. a. Garis menyinggung $y = 2x - x2 + 5$ pada $x = 2$, maka ordinat titik singgung adalah $y = 2(2) - (2)2 + 5 = 5$. Jadi, titik singgung (2, 5)

   b. Grafik garis dan kurva y adalah sebagai berikut.



8. a. Titik potong (-1, 0) ➔ $0 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d$

   ➔ $0 = -a + b - c + d$ ....(1)

   Titik potong (0, 4) ➔ $4 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d$ ➔ $d = 4$ ....(2)

   Titik potong (1, 4) ➔ $4 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d$ ➔ $0 = a + b + c$ ....(3)

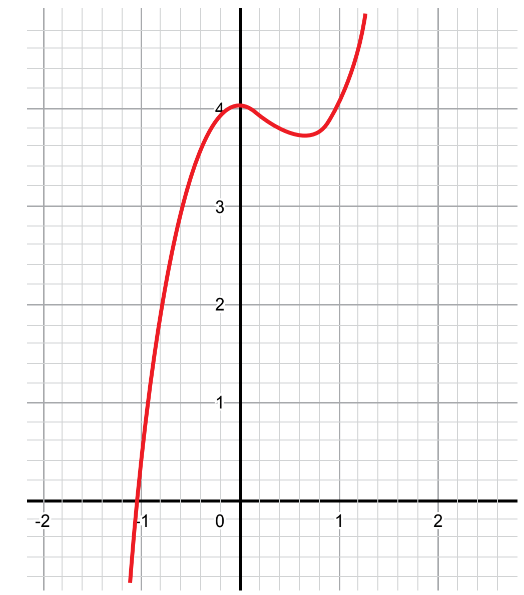
   Titik potong (-2, -20) ➔ $-20 = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d$

   ➔ $-12 = -4a + 2b - c$ ....(4)

   Dari persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh $b = -2$. Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh persamaan $a + c = 2$ dan $8 = 4a + c$ sehingga diperoleh $c = 0$ dan $a = 2$.

   b. Fungsi polinom adalah $y = 2x^3 - 2x^2 + 4$ dan untuk $x = 2$ diperoleh $2(2)^3 - 2(2)^2 + 4 = 12$

   c. Grafik fungsi sebagai berikut.



9. a. Gradien dari garis adalah = -8/-6 = 4/3. Jadi persamaan garis $y - 4 = 4/3(x - 3)$ atau $y = 4/3\ x$

   b. Fungsi polinom derajat berupa fungsi kuadrat dengan bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Titik potong (3, 4) ➔ $4 = a(3)2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$ ....(1)

   Titik potong (9, 12) ➔ $12 = a(9)2 + b(9) + c = 81a + 9b + c$ ....(2)

   Titik potong (0, 6) ➔ $6 = a(0)^2 + b(0) + c = c$ ....(3)

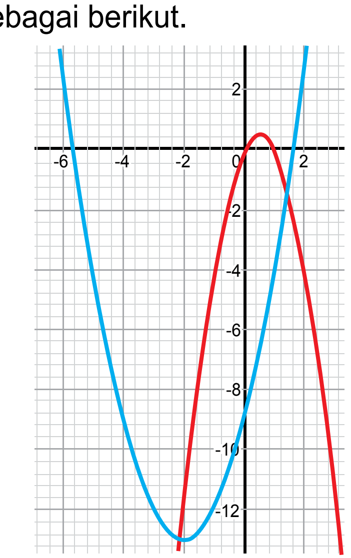
   Dari persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh $c = 6$, $a = 2/9$ dan $b = -4/3$. Jadi fungsi polinomnya adalah $f(x) = 2/9\ x^2 - 4/3\ x + 6$

10. a. $f(x) = 0$, maka $f(x) = 2x - 2x^2 = 0$ ➔ $x(2 - 2x) = 0$ ➔ $x = 0$, atau $x = 1$

   b. $h(x) = 0$, maka $h(x) = x^2 + 4x - 9 = 0$ ➔ Diskriminan $D = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-9) = 52$ ➔ $x = -2 + \sqrt{13}$, atau $x = -2 - \sqrt{13}$

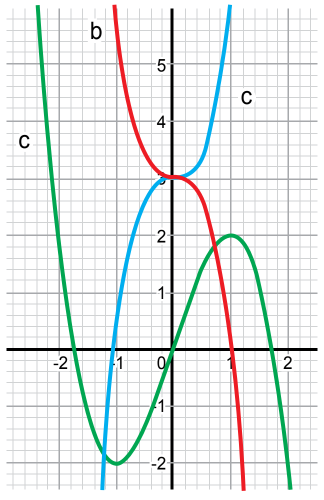
   c. f dan g berpotongan, maka $2x - 2x^2 = x^2 + 4x - 9$ ➔ $3x^2 + 2x - 9 = 0$ ➔ Diskriminan $D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(3)(-9) = 112$ ➔ $x = (-1+2\sqrt{7})/3$ atau $x = (-1-2\sqrt{7})/3$. Jadi titik potong kedua fungsi di $x = (-1+2\sqrt{7})/3$ dan $x = (-1-2\sqrt{7})/3$

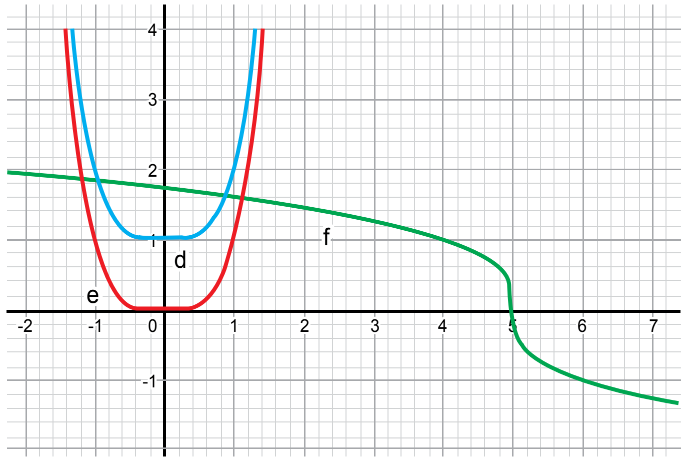
   d. Grafik fungsi f dan h adalah sebagai berikut.



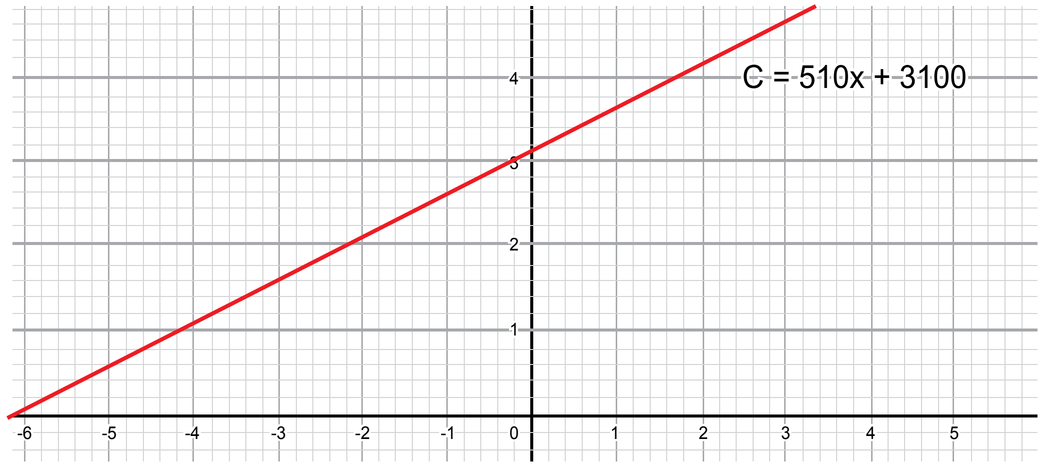
Latihan 2

1. a. $f(1) = 4(1)^4 – 5 = -1$
   b. $f(0) = 4(0)^4 – 5 = -5$
   c. $f(-1) = 4(-1)^4 – 5 = -1$
   d. $f(-2) = 4(-2)^4 – 5 = -69$
   e. $f(k) = 4k^4 – 5$
   f. $f(2t + 1) = 4(2t + 1)^4 – 5$
2. a. $g(-1) = 5x^3 – 5$
   a. $g(1.5) = 5x^3 – 5$
   b. $g(x) = 5x^3 – 5$
   c. $g(\sqrt{3}) = 5x^3 – 5$
   d. $g(2x) = 5x^3 – 5$
   e. $g(0) = 5x^3 – 5$
3. a. Besar kecepatan berubah setiap saat, maka fungsi jarak dicari melalui teknik integrasi, yaitu s = = 1/3 t^3 + t. Fungsi s merupakan fungsi polinom
   b. Jarak tempuh partikel setelah 315 menit = 5.25 jam adalah 1/3 $(5.25)^3$ + (5.25) = 53.348 km
   c. Jarak tempuh 410 km, maka diperoleh persamaan 0 = 1/3 t^3 + t – 410. Dari fungsi h(t) = 1/3 t^3 + t – 410 diperoleh h(10) = 1/3 $(10)^3$ + (10) – 410 = -66.667 dan h(11) = 1/3 $(11)^3$ + (11) – 410 = 44.667. Dapat disimpulkan bahwa waktu untuk menempuh jarak 410 km antara 10 jam sampai dengan 11 jam
4. a. Ketinggian setelah 11 detik adalah h(11) = 310(11) – $5(11)^2$= 2805 meter
   a. Ketinggian setelah 51 detik adalah h(51) = 310(51) – $5(51)^2$= 2805 meter
   b. Ketinggian setelah 61 detik adalah h(61) = 310(61) – $5(61)^2$= 305 meter
   Dari h(t) = 0, diperoleh 310t – $5t^2$ = 0, yaitu t = 0 atau t = 62. Dapat disimpulkan, peluru di udara selama 62 detik
5. Grafik berbagai fungsi berikut.

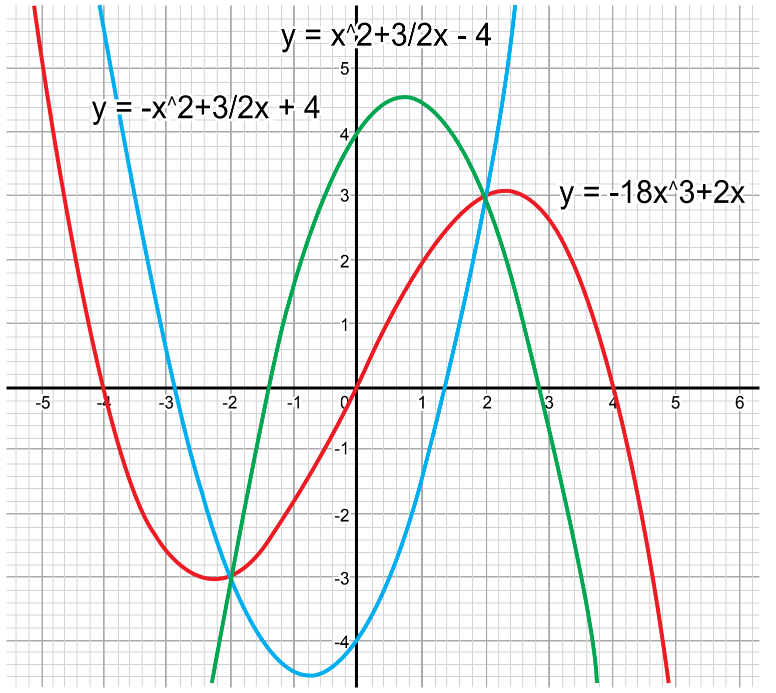




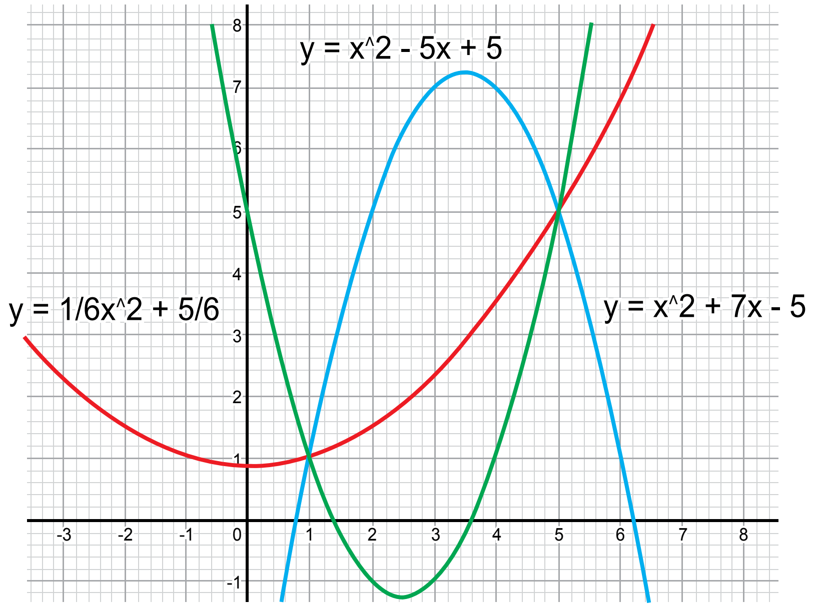
3. a. Untuk x = 0, diperoleh C = 3100 dan untuk C =0 diperoleh x = 6 4/51. Grafiknya sebagai berikut



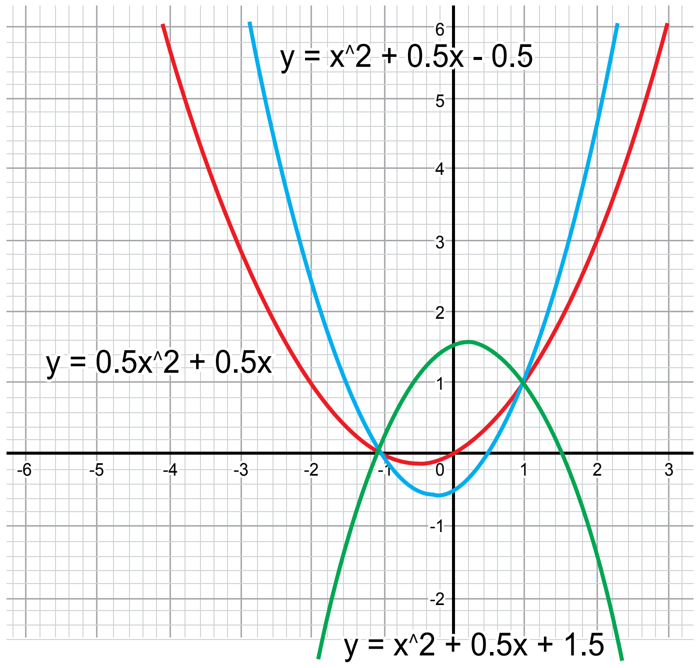
   b. Ongkos operasional per hari, C = 510(110) + 3100 = 59200 rupiah
   c. Ongkos operasional di bawah 33100 rupiah, maka 510x +3100 < 33100 sehingga diperoleh x < 58.8235. Jadi, jarak tempuh harus kurang dari 58.8235 km
7. Di antara grafik polinom yang melewati titik (2, 3) dan (-3, -2) adalah sebagai berikut



8. a. Diantara grafik fungsi kuadrat yang melewati (1, 1) dan (5, 5) adalah:



b. Diantara grafik fungsi kuadrat yang melewati (1, 1) dan (-1, 0) adalah:



UNIT 2: Pembagian Dan Faktorisasi Polinom

Latihan 1

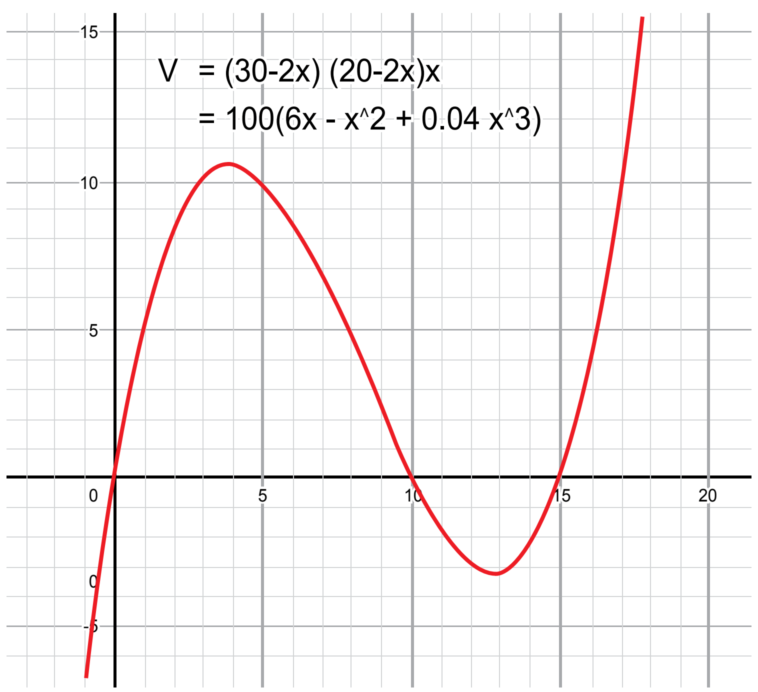
1. a. Hasil bagi: $x^2 + 2$, sisa pembagian: 6
   b. Hasil bagi: $\frac{1}{2}x^2 - 5/4\,x + 2\,7/8$, sisa pembagian: $-4\,5/8$
   c. Hasil bagi: $x - 2$, sisa pembagian: $4x + 4$
   d. Hasil bagi: $x - 2$, sisa pembagian: $6x$

2. a. Sisa pembagian: $P(1) = 4(1)^3 - 2(1)^2 + (1) + 4 = 7$
   b. Sisa pembagian: $6x$
   c. Sisa pembagian: $-x + 4$
3. a. $P(1) = (1)^4 + (1)^3 + (1)^2 + 3(1) + 2 = 6$,
   $P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0 \rightarrow$ P(x) memiliki faktor x + 1
   b. $P(1) = -(1)^3 + 4(1)^2 + 5(1) - 20 = -12$
   $P(2) = -(2)3 + 4(2)2 + 5(2) - 20 = -2$
   $P(4) = -(4)^3 + 4(4)^2 + 5(4) - 20 = 0 \rightarrow$ P(x) memiliki faktor x – 4
   c. Faktor dari 4 adalah ±1, ±2, ±4, jadi nilai $P(1) = 4(1)^4 - 2(1)^2 + 1 + 4 = 7$
   $P(-1) = 4(-1)4 - 2(-1)2 + (-1) + 4 = 5$
   $P(-2) = 4(-2)4 - 2(-2)2 + (-2) + 4 = 58$
   $P(-4) = 4(-4)4 - 2(-4)2 + (-4) + 4 = 992$
   $P(2) = 4(2)4 - 2(2)2 + (2) + 4 = 62$
   $P(4) = 4(4)^4 - 2(4)^2 + (4) + 4 = 1000$. Jadi P(x) tidak dapat difaktorkan
   d. $P(1) = (1)^2 - (1)^3 + 1 = 1$
   $P(-1) = (-1)^2 - (-1)^3 + 1 = 3$. Jadi P(x) tidak dapat difaktorkan
4. a. $P(a) = a^2 + 2a - a^3 + 2 = 0 \rightarrow P(1) = (1)^2 + 2(1) - (1)^3 + 2 = 4$
   $P(-1) = (-1)2 + 2(-1) - (-1)3 + 2 = 2$
   $P(-2) = (-2)2 + 2(-2) - (-2)3 + 2 = 10$
   $P(2) = (2)^2 + 2(2) - (2)^3 + 2 = 2$. Tidak ada nilai a bulat yang memenuhi.
   b. Sisa pembagian P(x) oleh 2x + b adalah 2 – ½ b[2 – ½ b(1 + ½ b)] = 0 , yaitu b^2 – 6b +16 = 0. Diskriminan D = (-6)^2 – 4(1)(16) = -28. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
5. a. $P(-2) = 2(-2)^3 - 2(-2) + b = 0$, diperoleh b = 12
   b. $P(1/2) = 2(1/2)^3 - 2(1/2) + b = 0$, diperoleh b = 3/4
6. a. P(x) dibagi x + 2, diperoleh sisanya b – 8a + 4 = 5 dan dibagi oleh x – 1 diperoleh sisanya b – 2 + a = 3. Dari kedua persamaan diperoleh a = 4/9 dan b = 4 5/9
   b. Agar P(x) habis dibagi oleh x + 2 dan habis dibagi oleh x – 1 diperoleh persamaan sisa b – 8a + 4 = 0 dan b – 2 + a = 0. Dari kedua persamaan diperoleh a = 2/3 dan b = 1 1/3
7. Hasil bagi $4x^2 - 6$ dan sisa pembagian $-4x^2 + 7x + 10$

Latihan 2

1. Misalkan rusuk terpendek dari balok adalah a, maka rusuk lainnya adalah a + 1 dan a + 2 sehingga volume balok 24 = a(a + 1)(a + 2), diperoleh
   $a^3 + 3a^2 + 2a - 24 = 0$. Penyelesaiannya adalah a = 2
   Jadi luas permukaan balok adalah
   L = 2a(a + 1) + 2(a + 1)(a + 2) + 2a(a + 2)
   = 2(2)(3) + 2(3)(4) + 2(2)(4) = 52 cm^2

2. a. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 – 2ab = 5$ ➔ $ab = 2$. Dari $a + b = 3$ diperoleh
   $a^2 + ab = 3a$
   $a^2 + 2 = 3a$ ➔ $a = 2$ dan $b = 1$ atau $a = 1$ dan $b = 2$
   b. $a^3 + b^3 = 2^3 + 1^3 = 9$
3. a. Polinom derajat 3: $P = an^3 + bn^2 + cn + d$. Pada awal pengamatan belum ada bakteri, jadi $d = 0$. Untuk nilai $n = 1, 2$, dan 3 diperoleh
   $a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = a + b + c = 7$
   $a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) = 8a + 4b + 2c = 18$
   $a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) = 27a + 9b + 3c = 53$
   Dari ketiga system persamaan linear, diperoleh $a = 3\ 1/3$, $b = -8$ dan $c = 35/3$. Fungsi polinom: $3\ 1/3\ n^3 – 8n^2 + 35/3\ n + 0 = 3\ 1/3\ n^3 – 8n^2 + 35/3\ n$
   b. Jumlah bakteri menit ke-4 adalah $3\ 1/3\ (4)^3 – 8(4)^2 + 35/3\ (4) = 132$
   a2 + b2 = (a + b)2 - 2ab = (0)2 - 2ab = -2ab
   a. $p = 30 – 2x$; $l = 20 – 2x$ dan $t = x$
   b. $V = plt = (30 – 2x)(20 – 2x)x$
   c. Grafik V terhadap x



Dari grafik terlihat volume maskimum V pada x = 3.9237

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas IV SD, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

Anton, Howard, dkk. 2005. *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990